Μαθημα 10ο 3/4/2017

Τοπολογια

⊕ Εστω (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ και $f: E_1 \to E_2$ και $x_0 \in E_1$

f συνεχης στο x_0 $\overset{op}{\Longleftrightarrow}$ $[(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in E_1)\ \rho_1(x,x_0)<\delta$

$\Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0))<\varepsilon]$

Εξαρτοται απο το x

! Αν θεωρησω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ εφοδιασμενο με το εσωτ. γινομενο τοτε αυτο μοιαζει με τον ορισμο συνεχειας στο $\mathbb{R}$

δηλ. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

απλη μεταφορα του ορισμου συνεχειας

Θεωρημα:

Εστω (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ με $f: E_1 \to E_2$. Η f ειναι συνεχης στο $x_0 \in E_1$ αν και μονο αν ισχυει ενα απο τα εξης:

i) Για καθε περιοχη $U(f(x_0))$ υπαρχει περιοχη $V(x_0)$ τετοια ωστε $f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$

ii) Για καθε περιοχη $U(f(x_0))$ το συνολο $f^{-1}(U(f(x_0)))$ ειναι περιοχη του σημειου x_0

iii) Για καθε ακολουθια $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E_1 με $\rho_1 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = x_0$ ισχυει $\rho_2 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} f(x_\nu) = f(x_0)$

Θυμαμαι!!!

$X \subseteq f^{-1}(f(X))$

$Y \supseteq f(f^{-1}(Y))$

$X \subseteq E_1$, $Y \subseteq E_2$

Αποδειξη

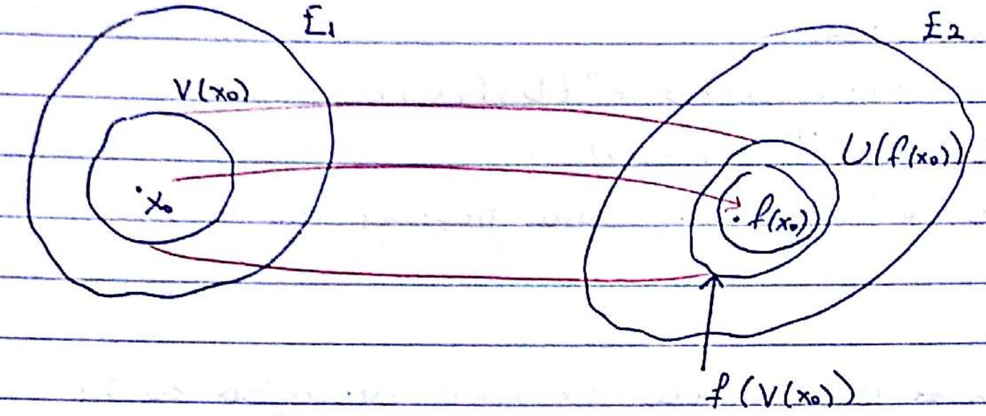
f συνεχης στο $x_0 \overset{1}{\Rightarrow} (i) \overset{2}{\Rightarrow} (ii)$

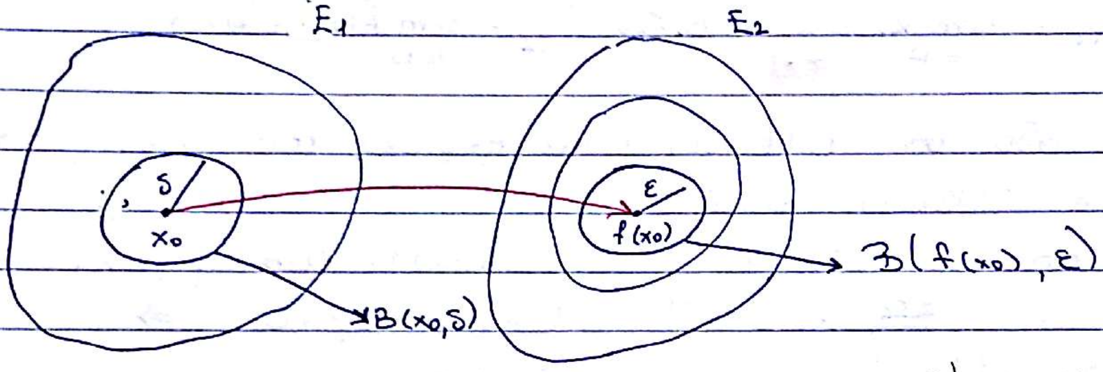
$\overset{3}{\Rightarrow} (iii) \overset{4}{\Rightarrow} f$ συνεχης στο x_0

(1) Εστω οτι η f συνεχης στο x_0 και

$U(f(x_0))$ τυχουσα περιοχη του $f(x_0)$ στον E_2

Υπαρχει $\varepsilon>0$: $B(f(x_0),\varepsilon) \subseteq U(f(x_0))$ ⊕ ισχυει με την προϋποθεση οτι $U(f(x_0))$ περιοχη





ολα τα x που ε... εχουν τιμες στο (+)

Επειδη f συνεχης στο x_0 "$(\exists \delta>0)(\forall x \in E_1)\ \rho_1(x, x_0)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0))<\varepsilon$" σημαινει οτι ισχυει

Θεωρω την σφαιρα $f(\underbrace{B(x_0,\delta)}_{V(x_0)}) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \underset{(*)}{\subseteq} U(f(x_0))$

Οποτε $f(B(x_0,\delta)) \subseteq U(f(x_0)) \Rightarrow f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$

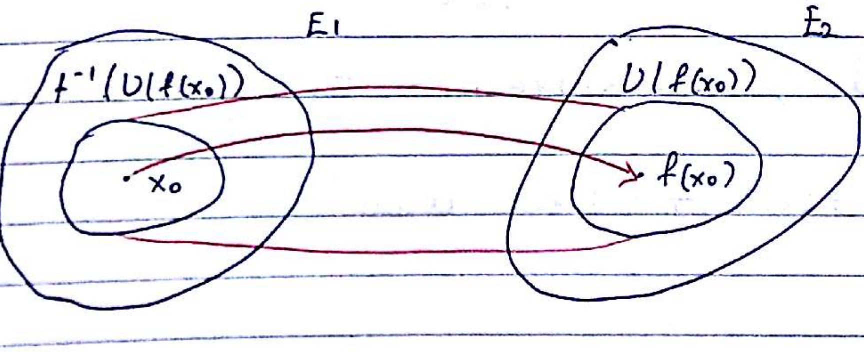
(2) Εστω $U(f(x_0))$ τυχουσα περιοχη του $f(x_0)$ στον E_2

Τοτε απο το (1) υπαρχει περιοχη $V(x_0)$ τετοια ωστε

$f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$

Αρα, θα εχουμε:

$f^{-1}(f(V(x_0))) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0)))$



Ισχυει επισης οτι:

$V(x_0) \subseteq f^{-1}(f(V(x_0))) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0)))$

$\Rightarrow \quad V(x_0) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0)))$

Συνεπως το $f^{-1}(U(f(x_0)))$ ειναι περιοχη του x_0 ως υπερσυνολο

③ Εστω ισχυει το (ii) και $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθια εν E_1, με $\rho_1 - \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu \underset{(**)}{=} x_0$. Θ.δ.ο $\rho_2 - \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} f(x_\nu) = f(x_0)$

Αρκει νδο αν $U(f(x_0))$ ειναι περιοχη του $f(x_0)$, τοτε $f(x_\nu) \in U(f(x_0))$ τελικά

τοτε απο το (ii) το $f^{-1}(U(f(x_0)))$ ειναι περιοχή του x_0 $\xRightarrow{(**)}$ $x_\nu \in f^{-1}(U(f(x_0)))$ τελικά $\Rightarrow$

$f(x_\nu) \in f(f^{-1}(U(f(x_0))))$ τελικά.

ομως ισχυει οτι $f(f^{-1}(U(f(x_0)))) \subseteq U(f(x_0))$

και ετσι εχουμε $f(x_\nu) \in U(f(x_0))$ τελικά!

④ Υποθετουμε το (iii) και εστω οτι η f δεν ειναι συνεχης στο x_0. Αρα $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in E)$ ενω $\rho_1(x, x_0) < \delta$ να εχουμε $\rho_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$, $\delta = \frac{1}{\nu}$ [επειδη οτι η f δεν ειναι συνεχης]

Θεωρω το συνολο

$A_\nu = \{x \in E : \rho_1(x, x_0) < \frac{1}{\nu} \text{ και } \rho_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon\} \neq \emptyset$, $\nu \in \mathbb{N}$

$(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθια εν E_1, $x_\nu \in A_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$

$\underset{\text{αλολ. πραγμ.}}{0 \leq \rho(x_\nu, x_0) < \frac{1}{\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} \rho_1(x_\nu, x_0) = 0 \Rightarrow$

$\rho_1 - \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = 0$, $(f(x_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν E_2: $\rho_2(f(x_\nu), f(x_0)) \geq \varepsilon$

$\nu \in \mathbb{N}$ δηλ. $f(x_\nu) \not\to f(x_0)$ ατοπο!

$f^{-1}(A)$ ορίζεται πάντοτε ανεξάρτητα από το αν η f είναι 1-1 και επί

Θεώρημα

Έστω (E_1, ρ_1), (E_2, ρ_2) μ.χ και $f: E_1 \to E_2$. Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα εξής:

i) $\forall A \subseteq E_2$ ανοιχτό εν E_2 ισχύει: $f^{-1}(A)$ ανοιχτό στον E_1

ii) $\forall K \subseteq E_2$ κλειστό εν E_2 ισχύει $f^{-1}(K)$ κλειστό στον E_1

Απόδειξη

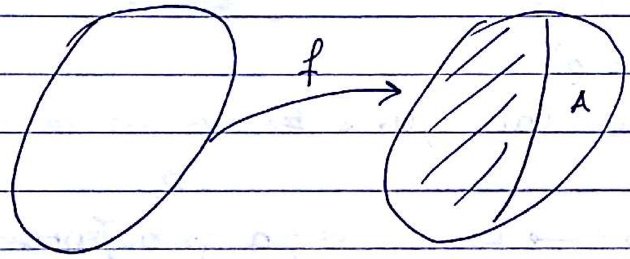
Ισχύει από θεμ. έννοιες ότι $f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c$ οπότε δεν χρειάζεται να δείξω το (ii) είναι μια απλή γραμμή εναλλάσσαμε κλειστά με ανοιχτά

i) Αρκεί νδο f συνεχής $\Leftrightarrow$ (i)

($\Rightarrow$) Έστω f συνεχής και A ανοιχτό, $A \subseteq E_2$

Αν $A = \emptyset$ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, εφόσον το κενό σύνολο είναι ανοιχτό

Συνεπώς παίρνω την περίπτωση ότι $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ Δεν με νοιάζει αν $A \neq \emptyset$



Θεωρούμε $x \in f^{-1}(A)$ τότε $f(x) \in A$

A ανοιχτό, άρα το A περιοχή του $f(x)$

$\underset{f \text{ συν.}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(A)$ περιοχή του x

Άρα το $f^{-1}(A)$ είναι περιοχή του τυχόντος σημείου του x

Άρα $f^{-1}(A)$ ανοιχτό

($\Leftarrow$) Έστω ισχύει το (i) θ.δο f συνεχής

Θεωρούμε $U(f(x))$ τυχούσα περιοχή του $f(x)$

Scanned by CamScanner

Ⓔ Η αντιστροφη εικονα ενος συνολου ειναι ανοιχτο συνολο

$(\exists \varepsilon > 0)\ B(f(x), \varepsilon) \subseteq U(f(x))$ ⊛

Απο το (i) $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ ειναι ανοιχτο συνολο

και $\underbrace{x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))}_{\text{προφανες}} \overset{⊛}{\subseteq} f^{-1}(U(f(x)))$

Αρα το $f^{-1}(U(f(x)))$ ειναι περιοχη του x

Σχολιο

$f: E_1 \to E_2$ συνεχης και $g: E_1 \to E_2$ συνεχης, $f|_A = g|_A$

A πυκνο $\subseteq E_1$

! $a^x = a^{\lim x_v}$;Þ !

Νικολαϊδακης

⊛ $(a_v)_{v \in \mathbb{N}}$ στον μ.χ (E, ρ)

$a: \mathbb{N} \to E$ συναρτηση $(a_1, \dots, a_v \in E)$

Υπακολουθια: $a: \mathbb{N} \to E$, a γν. αυξουσα

$\uparrow k$ ($a \circ k$ ισυνθεση)

$\mathbb{N}$

Συνθεση: $(a \circ k)(n) = a(k(n)) = a_{k(n)} = a_{k_n}$

$k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γν. αυξουσα $\Rightarrow$ $k_n \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$ Αποδειξτε το

η k_n γν. αυξουσα, $n \to k_n = k(n)$

η $k_n = 2n$ μπορουσε να ειναι ή $k_n = 2n+1$ ή $k_n = 2n+6$...

i) $k_1 \geq 1$ ισχυει αφου φυσικος

ii) αν $k_n \geq n \overset{\text{(επαγωγη)}}{\Rightarrow} k_{n+1} \geq n+1$

$k_{n+1} > k_n \Rightarrow k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n+1$

⊕ $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$: $a_\nu \to \ell$ σημαινει οτι:
$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)$: $\rho(a_n, \ell) < \varepsilon$ } ① ισχυει
"$n_0(\varepsilon)$

$(a_{\kappa_n}) \Rightarrow a_{\kappa_n} \to \ell$
Εστω ενα $\varepsilon>0$ θα βρουμε ενα $n_1 \in \mathbb{N}$ ετσι ωστε
$\rho(a_{\kappa_n}, \ell) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$n_1 = n_0 \quad \forall n \geq n_0$
$\kappa_n \geq \kappa_{n_0} \geq n_0 \overset{①}{\Longrightarrow} \rho(a_{\kappa_{n_1}}, \ell) < \varepsilon$
$\kappa \Uparrow$

⊕ $a: \mathbb{N} \to E$ $\quad a$ γν. αυξ.

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \xrightarrow{a} E \\ \kappa\uparrow \nearrow a\circ\kappa \\ \mathbb{N} \\ \lambda\uparrow \text{ γν. αυξ.} \\ \mathbb{N} \end{array}$$

παιρνω τη συνθεση $(a\circ\kappa\circ\lambda)(n) = a_{(\kappa\circ\lambda)(n)} = a_{\kappa(\lambda(n))} = a_{\kappa_{\lambda_n}}$
$a_{\kappa_\lambda} \qquad a_{\kappa_{\lambda_n}}$
$a_n \to (a_{2n})$: υποακολουθια $\longrightarrow a_{6n+2}$ ειναι υπακολουθια?
$\kappa_n = 2n \qquad \lambda_n = 3n+1$

Προταση
Δινεται $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στον μ.χ (E,ρ), $\ell \in E$ με την ιδιοτητα
$\forall\ (a_{\kappa_n})_n$ υπακολουθια $\Rightarrow \exists\ a_{\kappa_{\lambda_n}}$: $a_{\kappa_{\lambda_n}} \to \ell \Rightarrow a_n \to \ell$.

αποδειξη
Εστω $a_n \not\to \ell$
$a_n \not\to \ell \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon>0$ και $\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n < \ldots$ απειροι φυσικοι
$a_{\kappa_n} \notin B(\ell, \varepsilon)$

ίδιος.
$\Rightarrow \exists\, a_{k_{\lambda_n}} : a_{k_{\lambda_n}} \to \ell \Rightarrow \exists\, n_0(\varepsilon) : \rho(a_{k_{\lambda_n}}, \ell) < \varepsilon$
$\forall\, n \geq n_0 \Leftrightarrow a_{k_{\lambda_n}} \in B(\ell, \varepsilon)\ \forall\, n \geq n_0$
↳ υπακολουθία της a_{k_n}

Άσκηση 1

$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$: ακολουθία στον μ.χ (E, ρ), $\ell \in E$

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n} \to \ell \\ a_{2n+1} \to \ell \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \to \ell$$

Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $a_{2n} \to \ell$: $\exists\, n_0(\varepsilon) = n_1 : \rho(a_{2n}, \ell) < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_1$ (1)

$a_{2n+1} \to \ell$: $\exists\, n_2 = n_2(\varepsilon) : \rho(a_{2n+1}, \ell) < \varepsilon$ (2)

Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ θδο $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall\, n \geq n_0$
$\rho(a_n, \ell) < \varepsilon$

Θέτω $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2+1\}$ $\forall\, n \geq n_0$

$\forall\, \kappa \geq n_0 \Rightarrow \rho(a_\kappa, \ell) < \varepsilon$ από (1) και (2)

Άσκηση 2

Δίνεται ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ στον μ.χ (E, ρ) και ισχύει
$a_{2n} \to \ell_1$, $a_{2n+1} \to \ell_2$, $a_{3n} \to \ell_3$ τότε $a_n \to \ell$ $(\exists\, \ell \in E)$
για κάποιο $\ell \in E$, δηλ. $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα

Λύση

Κοιτάμε τις ακολουθίες (a_{2n}) και (a_{3n}). Μήπως υπάρχει κοινή υπακολουθία; Υπάρχει η (a_{6n}) υπακολουθία και των δυο ακολουθιών οπότε $a_{6n} \to \ell_1$ αλλά και
$a_{6n} \to \ell_3$, συνεπώς $\ell_1 = \ell_3$ (1)

$a_{2n+1} \to \ell_2 \xrightarrow{\lambda = 3n+1} a_{6n+3}$

$a_{3n} \to \ell_3 \xrightarrow{\lambda = 2n+1} a_{6n+3}$

Άρα $a_{6n+3} \to \ell_3$, $a_{6n+3} \to \ell_2$ δηλ $\ell_2 = \ell_3$ (2)

Από (1), (2) ισχύει $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$